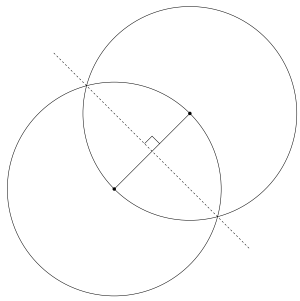
Плоское оригами и построения

А. Петрунин

Моему сыну Никодиму.

Представь себе, что ты сидишь на уроке и тебе скучно-скучно и очень хочется заняться геометрическими построениями: начертить, например, треугольник и найти в нём центр вписанной и описанной окружностей и ортоцентр и провести прямую Эйлера и всё такое. И учитель уже давно на тебя не смотрит, а бубнит себе что-то под нос о феодальной раздробленности, но вот беда: циркуль и линейку дома забыл.



Вот в такой вот ситуации, наверное, оказались 15 лет назад два оригамиста, итальянец Бенедетто Скимеми и японец Хамяки Худзита, сидят и вдруг думают: «а ведь складка листа бумаги — это прямая». Например, если взять на листке отрезок и согнуть его так, чтобы его концы соединились, а потом разгладить лист аккуратненько на парте, то перегиб образует срединный перпендикуляр к исходному отрезку. Обычное построение срединного перпендикуляра (см. рисунок) длиннее. Оно требует и циркуль и линейку (одной линейкой не обойдёшься), а тут вроде совсем ничего не надо.

Чтобы продолжить, им пришлось придумать набор правил для этого нового типа построений. Например, при обычном построении с помощью циркуля и линейки разрешается делать такие операции:

1. Провести прямую через две данные точки;

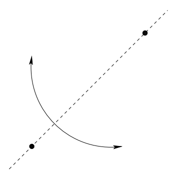
2. Построить окружность с данным центром и радиусом;

3. Найти точку пересечения двух прямых или прямой с окружностью или двух окружностей[1].

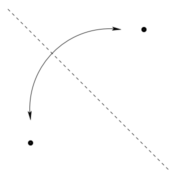
Что-то подобное нужно было и Бенедетто с Хамяки. Для этого, они математически описали приёмы, которыми давно пользовались оригамисты, вот они:

[1]Такие точки пересечения существует не всегда, правило утверждает только что если такая точка есть то её «можно» найти.

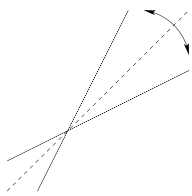
1. Пусть заданы две точки, тогда лист можно сложить так, что данные две точки будут на складке;



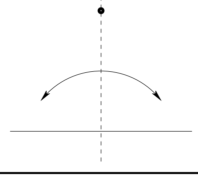
2. Пусть заданы две точки, тогда лист можно сложить так, что одна перейдёт в другую;



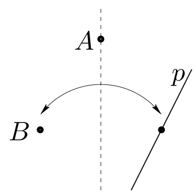
3. Пусть заданы две прямые, тогда лист можно сложить так, что одна прямая перейдёт в другую



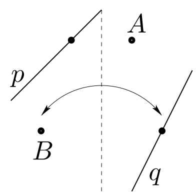
4. Пусть заданы прямая и точка, тогда лист можно сложить так, что точка попадёт на складку, а прямая перейдёт в себя (т.е. линия складки будет ей перпендикулярна).



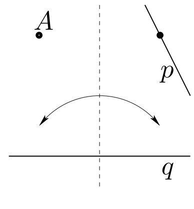
5. Пусть заданы прямая p и две точки A и B, тогда лист можно[2] сложить так, что точка A попадёт на складку, а B на прямую p.



6. Пусть заданы две прямые p и q и две точки A и B, тогда лист можно[2] сложить так, что точка A попадёт на прямую p, а точка B попадёт на прямую q.



7. Пусть заданы две прямые p и q и точка A, тогда лист можно сложить так, что точка A попадёт на прямую p, а прямая q прейдёт в себя (т.е. линия складки будет ей перпендикулярна).



[2] Такая складка существует не всегда, правило утверждает только, что если такая складка есть, то её «можно» найти.

Последнее правило добавил позже другой японский оригамист Косиро Хатори, заметив, что Бенедетто с Хамяки забыли его включить. Эту последнюю складку, как и некоторые другие из этого набора, можно получить как результат последовательного применения остальных, т.е. для математика она ничего не добавляет, но оригамисты не мнут бумагу зря.

Ну теперь можно наслаждаться и заниматься любыми построениями. Например:

1. Если задан произвольный треугольник, то его *биссектрисы*, а, стало быть, и *центр его вписанной окружности* можно найти, применив правило 3 ко всем парам его сторон.

2. *Срединные перпендикуляры* и *центр описанной окружности* можно найти, применив правило 2 ко всем парам его вершин. После этого найти *медианы* и *центр тяжести*, применив правило 1 к каждой вершине в паре с уже найденной выше серединой противоположной стороны.

3. *Высоты* и *ортоцентр* легче всего найти, применив правило 4 к каждой вершине в паре с противоположной стороной.

Далее можно убедиться, что ортоцентр, центр тяжести и центр описанной окружности действительно лежат на прямой Эйлера, применив правило 1 к любой паре из этих точек.

Конечно, сгибая так листок, невозможно построить окружность, но, оказывается, верно следующее: Любую точку, которую можно построить с помощью циркуля и линейки, можно построить сгибаниями. Чтобы доказать это, достаточно предъявить построение двух типов точек:

1. Точки пересечения окружности с прямой, если про окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней.

2. Точки пересечения двух окружностей, если про каждую окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней.

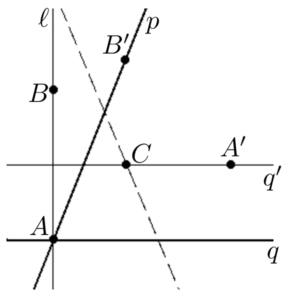
Первое можно сделать, применив правило 5, взяв за A центр окружности, за B точку на окружности, а за p данную прямую. Второе сделать сложнее, короткой последовательности сгибаний мне найти не удалось. Но такую последовательность можно получить, показав, что с помощью сгибаний можно построить инверсию точки относительно окружности, если про окружность известно только местоположение центра и одна точка на ней. Потом, применив инверсию, которая переводит одну из двух данных окужностей в прямую, свести задачу к предыдущей.

Упражнение. *Если вы знаете, что такое инверсия, попробуйте сделать это сами.*

Оказывается, что обратное не верно, то есть сгибаниями можно построить точки, которые невозможно построить с помощью циркуля и линейки.

Вот два примера: эти задачи на построение известны уже более двух тысяч лет, а более сотни лет назад была доказана невозможность решения каждой из этих задач с помощью циркуля и линейки:

Трисекция угла. *Разбить данный угол на три равные части.*



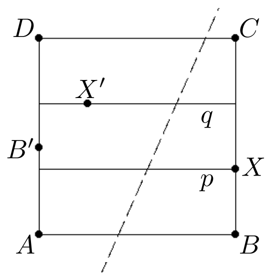
Это решение было предложено Хисаси Абэ. Мы предлагаем взять лист бумаги и провести построение «руками».

Построение. Пусть угол задан двумя складками p и q, обозначим через A вершину угла. Сначала проведём подготовительное построение, нам нужно: 1. восстановить перпендикуляр ℓ к q через A (правило 4), 2. отметить на ℓ произвольно точку B и восстановить срединный перпендикуляр q' к отрезку AB (правило 2).

Теперь всё готово для главной складки:

Сложим лист так, чтобы A попала на q', а B на p (правило 6). При этом образ A' вершины A ляжет на первую триссектрису нашего угла, а точка C на пересечении q' с новой складкой будет лежать на второй. То есть лучи AA' и AC будут делить угол на три равные части.

Удвоение куба. *Построить два отрезка с отношением длин $\sqrt[3]{2}$.*



Это решение предложил Петер Мессер.

Построение. Сначала проведём подготовительное построение: Нам нужно построить квадрат $ABCD$, разделённый на три равные части складками параллельными стороне AB. Предлагаем это сделать читателю. Введём обозначения как на чертеже: обозначим разделяющие отрезки через p и q а правый конец p через X.

Теперь давайте сложим лист так, чтобы точка B легла на сторону AD, а X легла на разделяющую складку q. При этом B', образ B, разделит сторону AD в отношении $1 : \sqrt[3]{2}$.

Упражнение. *Докажите, что в результате описанных двух построений мы действительно получим то, что хотели.*

На этом список «невозможных построений» не кончается. При помощи складываний можно также построить правильный семиугольник, который невозможно построить при помощи циркуля и линейки.

В чём же причина, какое из описанных правил добавляет новые возможности? Чтобы это понять, можно попытаться построить складку в каждом правиле 1—7, стр. 2 с помощью циркуля и линейки. Довольно легко построить все прямые складок в правилах 1—5 и 7. Стало быть, дополнительные возможности скрыты в правиле номер 6. Не удивительно что основной шаг в построениях трисекции угла и удвоении куба был сделан применением именно этого правила.

Причина, оказывается, в следующем: чтобы найти прямую сгиба в правиле 6, требуется решить уравнение третьей степени, тогда как в каждом из построений с помощью циркуля и линейки решаются уравнения только 1 и 2-ой степеней.